

Chapitre III : Modélisation numérique

III-1- Introduction :

La méthode des caractéristiques consiste à écrire les deux équations aux dérivées partielles du mouvement dans les axes liés aux trajectoires des perturbations. Ces équations sont exprimées en forme de différences finies en utilisant un intervalle de temps dt bien spécifié. Les solutions sont obtenues à l'aide d'un ordinateur. La méthode présente certains avantages dont on citera :

- Les conditions aux limites sont facilement programmables.
- La stabilité de la solution est assurée.
- Les systèmes les plus complexes peuvent être manipulés facilement.
- La programmation des équations est très aisée.

III-2- Les caractéristiques

Pour un canal rectangulaire, les équations de Saint-Venant sont :

$$h \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = J_f - J_e \quad (\text{III.2})$$

Avec :

$$\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial t} dt = dh \quad (\text{III.3})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt = dU \quad (\text{III.4})$$

Où l'équation (III.3) et l'équation (III.4) sont les différentielles totales de la profondeur d'eau, dh , et de la vitesse moyenne, dU , respectivement.

Le système d'équation, l'équation (III.1) à l'équation (III.4) proposé par Massau (voir Chow, 1959, p.587) donne un jeu de quatre équations aux dérivées partielles avec quatre inconnues : $\partial h / \partial x$ et $\partial h / \partial t$, $\partial U / \partial x$ et $\partial U / \partial t$.

Si l'on exprime la profondeur d'eau, h , par la célérité d'onde c , on écrira :

$$c^2 = gh \quad (\text{III-5})$$

Et par conséquent, après différentiation :

$$d(c^2) = 2c \, dc = d(gh)$$

La célérité, c , devient ainsi une mesure de la profondeur d'eau, h .

1) Les équations de Saint Venant s'écrivent dans le système de variables, U et c :

$$c \frac{\partial U}{\partial x} + 2U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + 2c \frac{\partial h}{\partial x} = g(J_f - J_e) \quad (\text{III.7})$$

2) En faisant la somme et la différence de ces deux équations, on obtient un système équivalent dont la forme est la suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (U + c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (U + 2c) = g(J_f - J_e) \quad (\text{III.8})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (U - c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (U - 2c) = g(J_f - J_e) \quad (\text{III.9})$$

Les arguments de gauche peuvent représenter des dérivées des dérivées totales ; on peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt} (U + 2c) = g(J_f - J_e) \quad (\text{III.10.a})$$

$$\frac{d}{dt} (U - 2c) = g(J_f - J_e) \quad (\text{III.10.b})$$

$$\text{Avec } (U + c) = \frac{dx}{dt}, \quad (U - c) = \frac{dx}{dt} \quad (\text{III.11})$$

La dernière relation, équations. (III.11), est la célérité absolue définie :

$$\frac{dx}{dt} = c_w = (U \pm c) \quad (\text{III.12})$$

Qui représente la vitesse par rapport au sol. Le double signe indique qu'une propagation en aval et en amont est possible.

Les quatre équations, équation (III.10.a et III.10.b) et équations (III.11), forment le système d'équations aux dérivées totales des caractéristiques ; elles remplacent les deux équations aux dérivées partielles de Saint Venant, équations (III.2).

A condition qu'on (un observateur) suive les courbes définies par $\frac{dx}{dt} = (U \pm c)$, les équations précédentes, en admettant que le canal soit sans frottement et horizontal, alors $(j_f - j_e) = 0$

Prendent des formes simples :

$U + 2c = \text{Cte}$ sur les caractéristiques positives, C^+ définies par $\frac{dx}{dt} = (U+c)$

$U - 2c = \text{Cte}$ sur les caractéristiques négatives, C^- définies par $\frac{dx}{dt} = (U-c)$

Les courbes caractéristiques C^+ et C^- , peuvent être tracées sur un plan, x et t (voir Figure III-1). [2]

III-3- Méthode des caractéristiques :

Les quatre équations différentielles ordinaires, équations (III.10.a) et (III.10.b) peuvent (voir Viessman et al, 1972, p194) être écrites ainsi :

$$C^+ \begin{cases} dU + \sqrt{g/h} dh + dt [g(I_e - I_f)] = 0 \\ dx = (U + \sqrt{gh})dt \end{cases} \quad (\text{III.13.a})$$

$$C^- \begin{cases} dU - \sqrt{g/h} dh + dt [g(I_e - I_f)] = 0 \\ dx = (U - \sqrt{gh})dt \end{cases} \quad (\text{III.13.b})$$

Une solution aux équations (III.13.a) et (III.13.b) peut être établie de façon numérique ; elle donne description d'un mouvement non permanent d'une position à l'autre dans un canal.

III-3-1- Les courbes caractéristiques :

Les courbes données par $dx = (U \pm \sqrt{gh}) dt$, sont les courbes caractéristiques positives, C^+ et négatives, C^- issues des points communs, L (x_L, t_L) et R (x_R, t_R), où (voir Figure III-1) sont données les vitesses, U_L, U_R , et les profondeurs d'eau, h_L et h_R .

Donc, en résolvant les équations pour U et h en différents point, P, P_1, P_2 etc., Communs à deux courbes caractéristiques à travers le plan, x et t , on obtiendra le mouvement non permanent de l'écoulement. [2]

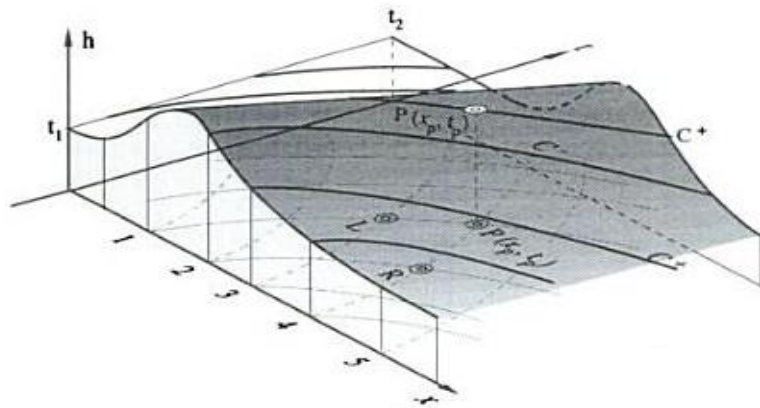


Figure III-1 : Profil d'un écoulement non permanent aux temps, t_1 et t_2 .

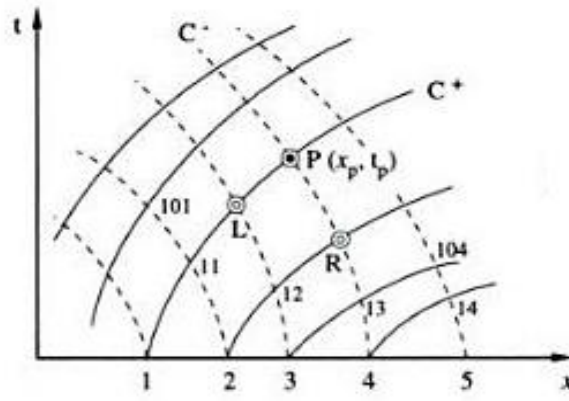


Figure III-2 : Surface autour du point, P (x_p, t_p), projetée sur le plan, x et t, (grille irrégulière).

III-4- Procédure de calcul :

En substituant des différences finies aux différentielles (voir Viessman et al 1972, p .195), les équations (III.13). s'écrivent (voir Figure III-2) :

$$\begin{cases} (U_P - U_L) + \sqrt{\frac{g}{h_L}} (h_p - h_L) - (t_p - t_L) [g(J_{eL} - j_f)] = 0 \\ (x_p - x_L) = (U_L + \sqrt{gh_L})(t_p - t_L) \end{cases} \quad C^+ \quad \text{(III. 14)} \quad \text{(III. 15)}$$

$$\begin{cases} (U_P - U_L) - \sqrt{\frac{g}{h_L}} (h_p - h_L) - (t_p - t_L) [g(J_{eL} - j_f)] = 0 \\ (x_p - x_L) = (U_L - \sqrt{gh_L})(t_p - t_L) \end{cases} \quad C^- \quad \text{(III. 16)} \quad \text{(III. 17)}$$

Il y a quatre inconnues: x_p , t_p et U_p , h_p

On obtient d'abord le temps t_p , en éliminant x_p entre l'équation (III. 15) et l'équation (III. 17) :

$$t_p = \frac{(x_L - x_R) + t_R(U_R - \sqrt{gh_R}) - t_L(U_P + \sqrt{gh_L})}{(U_L - U_P) - (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R})} \quad \text{(III.18)}$$

On obtient ensuite la distance x_p , par l'équation (III. 15) :

$$x_p = x_L + (U_L + \sqrt{gh_L})(t_p - t_L) \quad \text{(III. 19)}$$

La position du point, P (x_p, t_p), est ainsi obtenue (voir Figure III-2)

On obtient la profondeur d'eau, h_p , au point, P, en éliminant U_p entre l'équation (III.14) et l'équation (III. 16) :

$$h_p = \{(U_L - U_R) + (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R} - (t_p - t_L) [g (J_{eL} - j_f)] + (t_p - t_R) [g (J_{eR} - j_f)]\} [\sqrt{g/h_L} + \sqrt{g/h_R}]^{-1} \quad (\text{III.20})$$

On obtient ensuite la vitesse moyenne, U_p à travers la profondeur d'eau à ce point, P, par l'équation (III.14) :

$$U_p = U_L - \sqrt{g/h_L} (h_p - h_L) - (t_p - t_L) [g (J_{eL} - j_f)] \quad (\text{III.21})$$

Ainsi sont obtenues la vitesse et la profondeur d'eau, U_p et h_p , au point P (x_p, t_p).

Cette méthode permet de calculer explicitement la vitesse, U_p et la profondeur, h_p en tout point du réseau plan, x et t .

Par exemple, par un choix (conditions initiales) des points discrétisés, es (1, 2, 3, etc.) sur la ligne du temps, $t = 0$ (voir figure), il est possible de calculer une autre série des points (11, 12, 13, etc.) à un temps ultérieur. Une autre série de points (101, 104, Egalement L et R) est ensuite calculée en utilisant les points actuellement connus (11, 12, etc.). Ce type de calcul peut ainsi se répéter.

Avant de commencer le calcul, il faut évidemment spécifier les conditions aux limites et initiales (voir Figure III-3).

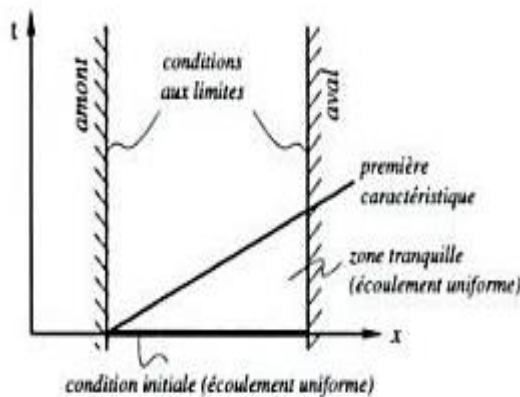


Figure III-3 : Condition aux limites.

III-5- Les conditions aux limites

Les conditions aux limites dépendent de la profondeur d'eau, de la vitesse moyenne ou du débit à l'amont et à l'aval et à tous les temps, $t > 0$. Pour l'écoulement subcritique, deux conditions sont donc nécessaires, l'une à l'amont et l'autre à l'aval; pour l'écoulement supercritique, deux conditions sont nécessaires en amont parce que l'effet en aval ne peut pas se propager vers l'amont. (En amont, on admet souvent un hydrogramme, $h = f(t)$ ou $U = f(t)$, ou également une relation de

type $U = f(h)$. En aval, on peut admettre une section de contrôle, par exemple la profondeur critique, h_c ou une jonction avec un autre canal.).[2]

La condition initiale donne la profondeur d'eau, la vitesse moyenne ou le débit à tous les points dans le canal au temps $t=0$. (On admet souvent qu'initialement l'écoulement est uniforme, $h \equiv h_n$).[2]

III-5-1- Condition à l'extrémité amont du canal :

A la limite amont le débit est connue pour chaque instant de temps, t en admettent que : on connaît l'hydrogramme de crue, c.-à-d. le débit en fonction du temps. Le débit au pas de temps $j+1$, est donné par la forme de l'hydrogramme imposé à l'entrée. Dans le cas présent, l'hydrogramme est supposé triangulaire. On le décrira par interpolation linéaire.

$$\text{Si } T \leq TP : \quad Q_i^{j+1} = Q_0 + \frac{Q_{max} - Q_0}{TP} T$$

$$\text{Si } TP < T \leq TP + TPD : \quad Q_i^{j+1} = Q_{max} - \frac{Q_{max} - Q_0}{TPD} (T - TP)$$

$$\text{Si } T > TP + TPD : \quad Q_i^{j+1} = Q_0$$

Avec :

Q_0 : Débit régime uniforme.

Q_{max} : Débit maximum de la crue.

TP, TPD : sont respectivement temps montée et décente de la crue.

En sachant le débit entrant au prochain pas temps $Q(x=0, t+\Delta t)$. On déterminera (h_p) en utilisant l'équation des courbes caractéristiques négative C^- (voir Figure III-4), c'est-à-dire, l'équation (III.16) et on obtient

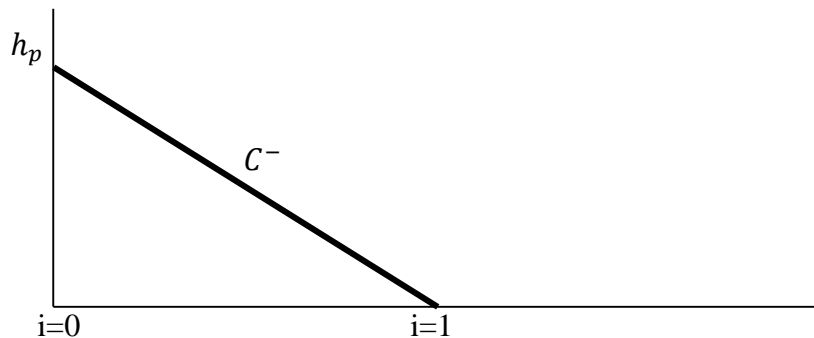


Figure III-4 : Schéma d'amont du canal

$$(U_P - U_L) - \sqrt{g/h_L}(h_p - h_L) - (t_p - t_L)[g(J_{eL} - j_f)] = 0$$

Pour déterminer la vitesse :

On a :

$$Q = V.S \rightarrow V = \frac{Q}{S} (V = U_P) ;$$

En utilisant la formule de Manning :

$$U_P = \frac{1}{n} R_h^{\frac{2}{3}} \sqrt{I}$$

Pour déterminer la hauteur :

$$h_p = h_L + \left[\left(\frac{1}{n} R_h^{\frac{2}{3}} \sqrt{I} \right) - U_L - ((t_p - t_L)g(J_{eL} - j_f)) / \sqrt{g/h_L} \right]$$

III-5-2- Condition à la limite aval du canal :

Pour l'extrémité aval du canal, la situation est l'inverse de celle en amont. En admettant que des équations des courbes caractéristiques positives C^+ (voir Figure III-5), c'est-à-dire, l'équation (III.14) et on obtient :

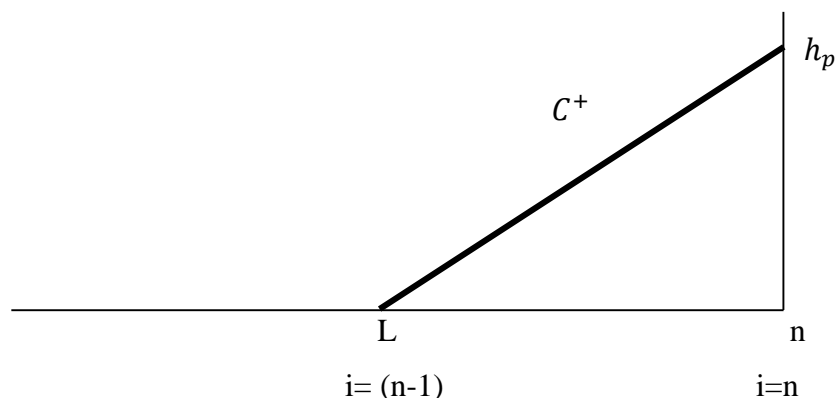


Figure III-5 : Schéma d'aval du canal

$$(U_P - U_L) + \sqrt{g/h_L}(h_p - h_L) - (t_p - t_L)[g(J_{eL} - j_f)] = 0$$

Pour déterminer la hauteur :

$$h_p = h_L + [-U_P + U_L - ((t_p - t_L)g(J_{eL} - j_f)) / \sqrt{g/h_L}]$$

On a :

$$Q = V.S \rightarrow V = \frac{Q}{S} (V = U_P) ;$$

En utilisant la formule de Manning Pour déterminé la vitesse :

$$U_P = \frac{1}{n} R_h^{\frac{2}{3}} \sqrt{I}$$

Donc :

$$h_p = h_L + [-(\frac{1}{n} R_h^{\frac{2}{3}} \sqrt{I}) + U_L - ((t_p - t_L)g(J_{eL} - j_f)) / \sqrt{g/h_L}] \quad (\text{III. 22})$$

La résolution de n'importe quel problème se ramène à l'écriture d'un certain programme informatique dans un langage spécifique.

La préparation de ce programme se fait toujours en deux étapes complémentaires on s'appuie. Dans notre étude sur des représentations graphiques (les organigrammes).

Dans la seconde étape on réalise le codage de l'organigramme dans un langage de programmation (pour nous, ce sera Matlab).

Matlab signifie Matrix laboratory. C'est un logiciel de calcul numérique. Il est destiné à traiter des applications à partir des outils de l'analyse numérique matricielle.

III-6- Calcul de la perte de charge :

Antoine Chézy a établi pour la première fois la formule qui régit l'écoulement uniforme à surface libre. Elle s'écrit sous la forme :

$$V^2 = C^2 . R_h . i \quad (\text{III. 23})$$

C : est le coefficient de Chézy qui dépend des paramètres géométriques et hydraulique de l'écoulement ;

R_h : Rayon hydraulique.

V : vitesse moyenne d'écoulement.

i : pente du canal.

Dans un écoulement en régime la perte de charge par mètre linéaire J (pente hydraulique) est égale à la pente géométrique i d'où

$$V^2 = C^2 . R_h . J$$

De nombreux hydrauliciens ont proposé de C qui dépend :

- La forme de la section transversale.

- La nature des parois.
- La vitesse de l'écoulement ou la pente.

III-6-1- Formule de Manning :

Manning a proposé à la formule suivante

$$C = \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}} \quad (\text{III. 24})$$

n : coefficient de Manning.

III-6-2- Formule de Chézy :

Strickler a cherché d'évaluer le coefficient de Manning comme suite :

$$K = \frac{1}{n} \rightarrow C = \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}}$$

K : coefficient de Strickler.

Avec la supposition que la variation de (J) est négligeable dans un pas de temps, on calcule (J)

Comme suite :

$$j^2(i, j + 1) = \frac{V^2(i, j)}{C^2(i, j) \cdot R_h^2(i, j + 1)} \quad (\text{III. 25})$$

Pour chaque nœud i et chaque pas de temps J on calcul $J(i, j + 1)$ en utilisant :

- $V(i, j)$: la vitesse moyenne dans le nœud i et dans le pas de temps J ;
- $C(i, j)$: le coefficient de Chézy calculé par la formule de Strickler en utilisant les paramètres hydraulique, dans les mêmes pas de temps et l'espace i, j ;
- R_h : le rayon hydraulique calculé pour les paramètres hydrauliques en i, j ;

III-7- L'organigramme de calcul :

